



TITLE:

# Some branched coverings of knots

AUTHOR(S):

張替, 俊夫

---

CITATION:

張替, 俊夫. Some branched coverings of knots. 数理解析研究所講究録  
1992, 813: 89-101

ISSUE DATE:

1992-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83055>

RIGHT:

## Some branched coverings of knots

関西学院大学理学部

張替 俊夫

(Toshio Harikae)

§ 1. はじめに

knot  $K$  上 branch する  $S^3$  の branched covering space を単に  $K$  の branched covering と呼ぶ。Hilden [8] と Montesinos [10] は任意の向きづけ可能な次元閉多様体がある knot の 3-fold irregular branched covering であることを示した。そこで、与えられた knot の 3-fold irregular branched covering はどんな空間になるかという問題を得る。その解答として Murasugi [11] は closed 3-braid の simple 3-fold irregular branched covering が存在すれば  $L(n, 1)$  と同相であることを示し、Hosokawa と Nakanishi [9] は pretzel knot の 3-fold irregular branched covering が存在すれば、 $L(n, 1)$  またはこれらの空間の連結和と同相であることを明らかにした。ここで "simple" とは branch index が 2 以下のことで、また  $L(0, 1)$ 、 $L(1, 1)$  はそれぞれ  $S^2 \times S^1$ 、 $S^3$  を表す。

本稿では内田 A との共同研究 [7] に基づき、特に Montesinos knot の 5-fold irregular dihedral branched covering (3-fold irregular の場合の拡張) を考える。Chumillas と Montesinos [3] は  $S^2 \times S^1$  が任意の奇素数  $p$  に対して knot の  $p$ -fold irregular dihedral branched covering になり得ないことを示している。また §3 で、knot の tetrahedral branched covering について考察する (詳細については [5] を参照したい)。なお本稿は [6] の一部をなしていることを付記しておく。

## §2. Irregular dihedral branched covering

$D_p$  を正  $p$  角形の対称性を表す群 ( $p$  次のは = 面体群) とする。 $D_p$  は  $\langle a, b \mid a^2, b^p, aba^{-1}b \rangle$  で表示され、 $p$  次の対称群  $\Sigma_p$  の部分群である。 $K$  で  $S^3$  内の knot を表し、 $G = \pi_1(S^3 - K)$  を  $K$  の knot group とする。このとき、 $G$  の  $D_p$  上への表現  $\mu$  を  $K$  の  $D_p$  表現と呼ぶ。以下  $p$  を奇素数とする。

Def 2.1  $\mu, \mu'$  を  $K$  の  $D_p$  表現とする。このとき  $\mu' = \theta \mu$  となる  $\Sigma_p$  の内部自己同型写像  $\theta$  が存在するとき、 $\mu$  と  $\mu'$  は同値であるという。

$\mathcal{P}_2(K)$  を  $K$  の 2-fold branched covering を表す。 $K$  の  $D_p$  表現

の同値類の個数は、 $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_p)$  の rank を使った次の定理で与えられる。証明は Fox [4] の第 10 節の議論を用いて容易に得られる。

Th 2.2  $K$  の  $D_p$  表現の同値類の個数は  $(p^2 - 1) / (p - 1)$  で与えられる。

$\Delta_K(t)$  を  $K$  のアレクサンダー多項式とすると、 $\Delta_K(-1)$  は  $H_1(\tilde{M}_2(K))$  の torsion 元の積と等しい。従って

系 2.3  $K$  の  $D_p$  表現が存在するための必要十分条件は  $\Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod{p}$  が成り立つことである。

以下  $D_p$  表現  $\mu$  に付随した  $K$  の  $p$ -fold irregular dihedral branched covering (以下、 $D_p$ -branched covering と呼ぶ)  $\tilde{M}_\mu(K)$  を考察する。 $K$  が 2-bridge knot  $S(\alpha, \beta)$  であるとき、もし  $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$  ならば  $K$  の  $D_p$  表現  $\mu$  が 1 つ存在し (同値類の個数が 1)、 $\tilde{M}_\mu(K)$  は  $S^3$  と同相になる。そこで bridge index が 3 以上の knot について考えたいが、そのために Montesinos knot に着目し、特に  $p=5$  のとき考える。(  $p \geq 7$  でも以下の議論と同様のことが成り立つ。) Figure 1 で与えられる diagram

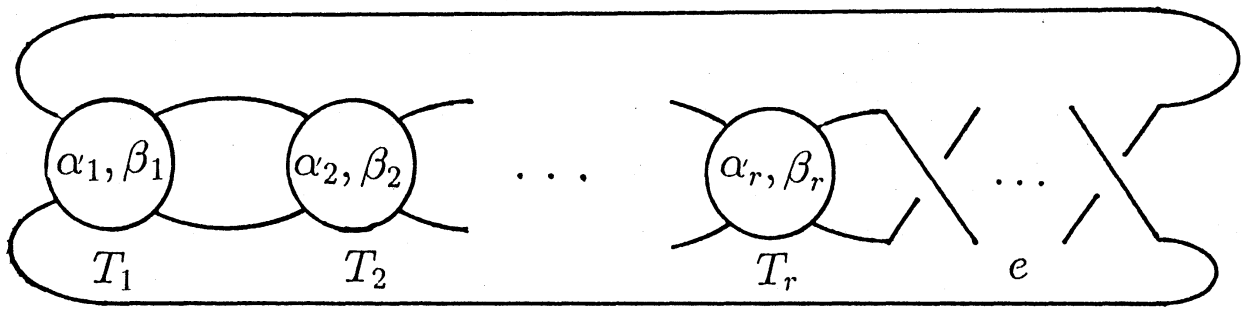


Figure 1

を持つ knot を Montesinos knot と呼ぶ、

$$M(e; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

で表す。ここで  $(\alpha_i, \beta_i)$  は rational tangle  $T_i$  に対する

Schubert notation であり、 $e$  は half twist の数である。 $\mu'$  を  $\alpha_i \equiv 0 \pmod{5}$  を満たす  $i$  の個数とする。すると次の主定理を得る。

Th 2.4  $K$  を Montesinos knot とする。

(1)  $\mu' = 0$  で  $K$  の  $D_5$  表現が存在するなら、 $D_5$  表現の同値類は 1 通りで、付随する  $D_5$ -branched covering は  $S^3$  と同相。

(2)  $\mu' = 1$  なら、 $K$  の  $D_5$  表現は存在しない。

(3)  $\mu' \geq 2$  なら、 $K$  の  $D_5$  表現は存在し、同値類の個数は

$\frac{1}{4}(5^{\mu'-1} - 1)$  で与えられる。付随する  $D_5$ -branched covering

は  $L(p_1, q_1) \# L(p_2, q_2)$  またはこれらの空間の連結和で

ある。ただし  $(p_i, q_i)$  は  $(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $(0, 1)$  または

(1, 1) と等しい。

この定理を示すため、まず  $\mu'$  と  $\mu$  (この場合は  $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_5)$  の rank) の関係を示す。K が Figure 1 の diagram を持つなら

$$H_1(\tilde{M}_2(K)) = \left\langle \begin{array}{c|c} S_1, \dots, S_r & S_i \alpha_i h^\beta, 1 \leq i \leq r \\ h & S_1 S_2 \dots S_r h^e \end{array} \right\rangle$$

を得る ([1] または [2] を参照せよ)。従って 2 次を得る。

Lemma 2.5 (1)  $\mu' = 0$  なら、 $\mu = 0$  または 1。

(2)  $\mu' \geq 1$  なら、 $\mu = \mu' - 1$ 。

Th 2.4 を証明するため、付随する  $D_5$ -branched covering を変えない knot の diagram に対する操作を導入する。knot K が  $D_5$  表現  $\mu$  を持つとき、G が K の Wirtinger 表示によって  $\langle x_i | r_j \rangle$  で表されるなら、 $\mu(x_i)$  は (25)(34), (12)(35), (13)(45), (14)(23), (15)(24) のうちの 1 つと等しい。そこで便宜上記号  $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$  を上の 5 つの元に対して導入する。trivial tangle  $(B, t)$  に対して、 $t$  の 2 本の arc に対する  $D_5$  表現がそれぞれ  $\bar{u}, \bar{v}$  ( $\bar{u} \neq \bar{v}$ ) ならば、 $t$  上 branch する B の付随する  $D_5$ -branched covering は 3-ball である。従って 2 次を得る。

Lemma 2.6 knot  $K$  が  $D_5$  表現  $\mu$  を持つとする。このとき  $K$  の diagram に対する以下の操作 I, II によって、knot または link  $K'$  と  $K'$  に対する  $D_5$  表現  $\mu'$  を得たとすると、 $\tilde{M}_{\mu'}(K')$  は  $\tilde{M}_{\mu}(K)$  と同相になる。ただし Figure 2, 3 において  $\bar{u}, \bar{v}$  は  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  の異なる元。

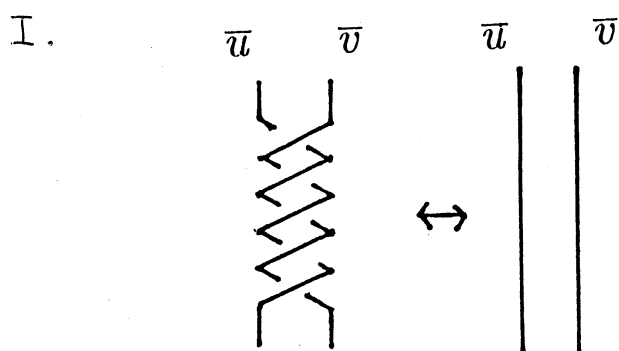


Figure 2

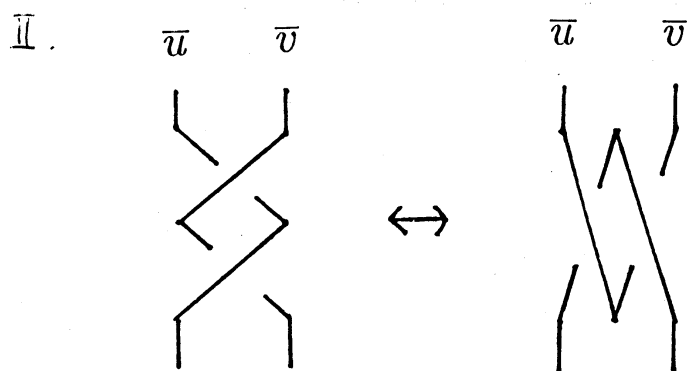


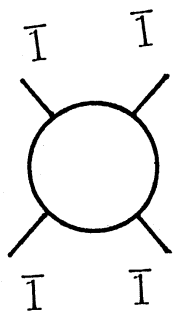
Figure 3

Remark (1) 操作 I は II より得られる。

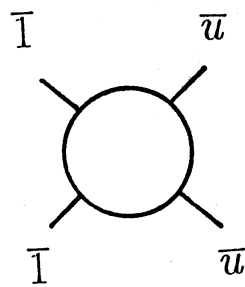
(2) Lemma 2.6 において  $\bar{u} = \bar{v}$  を許したとしても、 $K$  と  $K'$  の 2-fold branched covering の  $\mathbb{Z}_5$ -rank は等しい。

Th 2.4 の証明  $T$  を  $(\alpha, \beta)$  型の rational tangle とする。

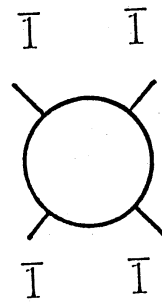
$\alpha \equiv 0 \pmod{5}$  のとき  $T$  の 4 つの端点の表現は 2通りある (Figure 4)。また  $\alpha \not\equiv 0 \pmod{5}$  のとき端点の表現は 2通りある (Figure 5)。もし  $K$  に対し  $2\mu' = 0$  び  $D_5$  表現  $\mu$  を持てば  $K$  の各 tangle に対する表現は Figure 5(ii) び与えられる。この



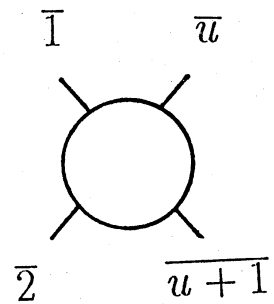
(i)



(ii)



(i)



(ii)

Figure 4

Figure 5

とき isotopy び  $K$  の各 tangle に half twist を加えること び  $\bar{u} = \bar{1}$  に変えることが出来る。このような tangle は Lemma 2.6 の操作 び horizontal trivial tangle に変えられる。従って得られる空間は  $S^3$  と同相。

$2\mu' = 1$  のとき  $2\mu = 0$  より  $K$  は  $D_5$  表現を持たない。

$2\mu' \geq 2$  のとき  $2\mu = 2\mu' - 1$  より  $K$  の  $D_5$  表現の同値類の個数は  $(5^{2\mu'-1} - 1) / 4$  と等しい。  $K$  の tangle  $T$  に対し  $2\alpha \not\equiv 0 \pmod{5}$  なら表現は Figure 5 (i) び与えられる (なぜなら  $\alpha \equiv 0 \pmod{5}$  となる他の tangle が存在する)。もし  $T$  に対し  $2\alpha \equiv 0 \pmod{5}$



なり表現は Figure 4 (i) または (ii) で与えられる。Figure 4 (iii) の tangle は Lemma 2.6 の操作 I, II で vertical trivial tangle に変えられる。この結果得られる link を  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$  とすると、 $L_i$  は 2-bridge knot  $S(\alpha_j, \beta_j)$  の連結和で  $2 \leq n \leq 4$ 。しかも  $L_i$  は  $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{5}\}$  のうちの1つの元が割り振られている。もし  $n=2$  なら、 $L_1$  と  $L_2$  には異なる元  $\bar{u}, \bar{v}$  がそれぞれ割り振られ、 $\widetilde{M}_\mu(L)$  は  $\#_{i=1}^2 (\widetilde{M}_2(L_i) \# \widetilde{M}_2(L_i))$  と同相であり、この空間は  $L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)$  あるいはこれらの連結和となる。次に  $n=3$  のとき、 $L_1, L_2, L_3$  に  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  が割り振られているとする。ただし  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  はすべて同じ元にはなり得ないので  $\bar{u} \neq \bar{v}$  を仮定する。 $\mu_1, \mu_2$  をそれぞれ  $\bar{u}$  と  $\bar{v}, \bar{w}$  が induce する  $L_1 \cup L_2, L_3$  の表現とする。そこで  $L_1 \cup L_2 \subset B_1, L_3 \subset B_2, B_1 \cup B_2 = S^3, \partial B_1 = \partial B_2$  となる 3-ball  $B_1, B_2$  をとる。 $\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2)$  における  $B_2$  の lift は 3-ball  $\widetilde{B}_{21}, \widetilde{B}_{22}, \dots, \widetilde{B}_{25}$  からなり、同様に  $\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$  における  $B_1$  の lift は 3-ball  $\widetilde{B}_{11}, \widetilde{B}_{12}, \dots, \widetilde{B}_{15}$  からなる。このとき  $\widetilde{M}_\mu(L)$  は  $(\widetilde{M}_{\mu_1}(L_1 \cup L_2) - \bigcup_{i=1}^5 \widetilde{B}_{2i}) \cup (\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3) - \bigcup_{i=1}^5 \widetilde{B}_{1i})$  で与えられる (ただし  $\partial \widetilde{B}_{1i}$  と  $\partial \widetilde{B}_{2i}$  は同一視)。  $\widetilde{M}_{\mu_2}(L_3)$  は 3つの空間  $\widetilde{M}_2(L_3), \widetilde{M}_2(L_3), S^3$  からなるので、 $\widetilde{M}_\mu(L)$  は

$$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j)) \# (S^2 \times S^1) \# (S^2 \times S^1)$$

と同相。 $n \geq 4$  のときも同様に考えて、 $\widetilde{M}_\mu(L)$  は

$\#(L(\alpha_j, \beta_j) \# L(\alpha_j, \beta_j))$  と  $S^2 \times S^1$  の連結和であり、 $S^2 \times S^1$  の個

数は  $2(n-2)$  である。■

$\rho_\mu$  を  $D_5$  表現を持つ knot  $K$  に対する  $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_5)$  の rank とする, Th 2.4 の証明より

Cor 2.7 Montesinos knot  $K$  が  $D_5$  表現  $\mu$  を持つとは

$$\rho_\mu = 2(\mu - 1)。$$

かつ 2 作間氏は次の Th が成り立つことを教示された。

Th 2.8 knot  $K$  が  $D_3$  表現  $\mu$  を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_3) \oplus \mathbb{Z}_3 \cong H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_3)。$$

この Th は  $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_3)$  と  $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_3)$  の表現行列を比較することによって容易に得られる。そこで筆者はこの Th の " $D_5$  版" を考えた。すなわち

Conj knot  $K$  が  $D_5$  表現  $\mu$  を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_5 \cong H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_5)。$$

ところが Cor 2.7 において  $\mu \geq 2$  (すなわち  $\mu' \geq 3$ ) とすれ

ばこの Conj の反例を与えらることになる。一方 Cor 2.7 が Montesinos knot 以外で成り立つかといえはそれはうそであり、実際 940, 949, 10103, 10155 に対して  $\mu = 2$  で  $\rho_\mu = 1$  となる。作問 A によると次の Conj が成り立つのではないかということだが、今のところ不明である。任意の奇素数  $p$  に対して  $\mu(K)$  を  $H_1(\tilde{M}_2(K); \mathbb{Z}_p)$  の rank,  $\rho_\mu(K)$  を  $D_p$  表現  $\mu$  に対応する  $H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_p)$  の rank とする。

Conj knot  $K$  が  $D_p$  表現  $\mu$  を持つば

$$\mu(K) - 1 \leq \rho_\mu(K) \leq \frac{1}{2}(p-1)(\mu(K) - 1).$$

### § 3. Tetrahedral branched covering

ここでは knot  $K$  の knot group  $G$  の 4 次の多代群  $A_4$  (正四面体群) 上の表現  $\mu$  ( $K$  の  $A_4$  表現と呼ぶ) とそれに付随した  $K$  の  $A_4$ -branched covering  $\tilde{M}_\mu(K)$  を考察する。詳しい証明等については [5] を参照されたい。

$A_4$  は 12 の元を持ち、 $A = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  を正規部分群として持つ。  $A$  を法とする  $A_4$  の factor group は  $\mathbb{Z}_3$  と同型で、 $A_4 = A \cup A(123) \cup A(132)$  と表される。  $B = A(123)$ ,  $C = A(132)$  とおく。  $G = \langle x_i \mid r_j \rangle$  を  $G$  の Wirtinger 表示とすると、  $\mu: G \rightarrow A_4$  が onto なる  $\mu(x_i) \in B$  または  $\mu(x_i) \in C$  が成

り立つ。§2 と同様に  $\mu$  の同値類を定義する。 $A_K(t)$  を  $K$  のアレクサンダー行列 ([2], [4] などを見よ)、 $\mu$  を 1 の原始 3 乗根、 $\mu$  を  $A_K(w)$  の  $\mathbb{Z}_2[w]$  における nullity とする時、Th 2.2 の証明と同様の手法で次を得る。

Th 3.1  $K$  の  $A_3$  表現の同値類は  $\frac{1}{3}(4^{\mu-1} - 1)$  で与えられる。

よく知らぬように (?)  $A_K(w)$  は  $K$  の 3-fold cyclic branched covering  $\tilde{M}_3(K)$  と関係づけられる。すなわち  $\beta$  を  $H_1(\tilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$  の rank とする時、 $\beta = 2(\mu - 1)$  が成り立つことかわかる。従って

Th 3.2  $K$  の  $A_4$  表現の同値類は  $\frac{1}{3}(2^\beta - 1)$  で与えられる。

また、 $K$  の  $A_4$  表現が存在するための必要十分条件は、 $\Delta_K(w)$  が  $\mathbb{Z}_2[w]$  において 0 になることである。もし  $\Delta_K(w) = aw + b$  とおけると、 $a \equiv b \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow \Delta_K(w)\Delta_K(w^2) = a^2 + b^2 - ab \equiv 0 \pmod{4}$ , 従って

Cor 3.3  $K$  の  $A_4$  表現が存在するための必要十分条件は、 $\Delta_K(w)\Delta_K(w^2) \equiv 0 \pmod{4}$  が成り立つことである。

$\tilde{M}_\mu(K)$  については  $K$  が 2-bridge knot のとき、特徴づけが可能である。すなわち、

Th 3.4 2-bridge knot の  $A_4$ -branched covering はもし存在すれば、あるレンズ空間と同相である。

証明 2-bridge knot  $K$  を 2 つの 2-string trivial tangle  $(B_1, t_1), (B_2, t_2)$  に分解する。  $\partial B_1 \cup \partial B_2 = S^3$ ,  $\partial B_1 = \partial B_2$ ,  $t_1 \cup t_2 = K$ .  $(B_i, t_i) \sim (D_i, \{x, y\}) \times I$ ,  $D_i$  は 2 点  $x, y$  を含む disc で  $I = [0, 1]$ .  $\{x, y\}$  上 branch する  $D_i$  の  $A_4$ -branched covering は genus 1 の disc. 従って  $t_i$  上 branch する  $B_i$  の  $A_4$ -branched covering は solid torus. ■

最後に 1 つの予想を掲げておく。

Conj. knot  $K$  が  $A_4$  表現  $\mu$  を持つとは

$$H_1(\tilde{M}_\mu(K); \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \cong H_1(\tilde{M}_3(K); \mathbb{Z}_2)$$

## 参考文献

- [1] M. Boileau and B. Zimmermann, *Symmetries of nonelliptic Montesinos links*, Math. Ann., **277** (1987), 563–584.
- [2] G. Burde and H. Zieschang, “Knots,” Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1985.
- [3] V. Chumillas and J. M. Montesinos, *The homology of cyclic and irregular dihedral coverings branched over homology spheres*, Math. Ann., **280** (1988), 483–500.
- [4] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in “Topology of 3-manifolds and related topics (ed. by M. K. Fort Jr.),” Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 120–167.
- [5] T. Harikae, *Tetrahedral branched coverings of spatial theta-curves*, preprint.
- [6] 張替俊夫, 空間内のグラフの分岐被覆, 第39回トポロジー・シンポジウム講演集, 岩手大学, 1992年7月, 113–125.
- [7] T. Harikae and Y. Uchida, *Irregular dihedral branched coverings of knots*, preprint.
- [8] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of  $S^3$* , Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 1243–1244.
- [9] F. Hosokawa and Y. Nakanishi, *On 3-fold irregular branched covering spaces of pretzel knots*, Osaka J. Math., **23** (1986), 249–254.
- [10] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$* , Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 845–846.
- [11] K. Murasugi, *On dihedral coverings of  $S^3$* , C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **2** (1980), 99–102.